Leseproben aus dem Buch "Elektrotechnik für Studierende: Band 1 – Grundlagen"

Dr.-Ing. Paul Christiani GmbH & Co. KG ISBN 978-3-86522-685-3

Autor des Buches: Leonhard Stiny

Die Formatierung dieser Leseprobe weicht von der Formatierung des Buches ab.

Leseprobe 1

1.6 Skalare und Vektoren

Skalare Größen (Skalare) haben keine Richtung, sie werden durch einen Zahlenwert (Maßzahl) mit einer evtl. zugehörigen Einheit eindeutig beschrieben. Der Zahlenwert ist im Allgemeinen eine reelle Zahl, er kann aber auch eine komplexe Zahl sein, wie z. B. bei komplexen Wechselstromwiderständen.

Beispiel 17
Für die Länge als skalare Größe ergibt sich folgende Darstellung

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} l & = & \{l\} & \cdot & [l] \\ \text{skalare Größe} & = & \{\text{Zahlenwert}\} & \cdot & [\text{Einheit}] \end{array}} \tag{1.2}$$

Beispiel 18
Skalare Größen sind: Temperatur, Zeit, Länge, Fläche, Masse, Energie, Ladung, Leistung, Widerstand.

Vektorielle Größen sind gerichtete Größen, sie werden *Vektoren* genannt. Zu ihrer vollständigen Beschreibung gehört ein *Betrag* (Zahlenwert für die Vektorlänge) mit der Einheit, und zusätzlich die Angabe einer *Richtung* in einer Ebene oder im Raum. Vektoren werden durch einen Pfeil über dem Formelzeichen gekennzeichnet, z. B. $\vec{F}$ bei der Kraft. Der Betrag eines Vektors ist eine skalare Größe, z. B. $\left|\vec{F}\right| = F$.

Beispiel 19
Für die Geschwindigkeit als vektorielle Größe ergibt sich folgende Darstellung

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \vec{v} & = & \{v\} & \cdot & [v] & \cdot & \vec{e} \\ \text{vektorielle Größe} & = & \{\text{Zahlenwert}\} & \cdot & [\text{Einheit}] & \cdot & \text{Richtung} \end{array}} \tag{1.3}$$

Für den Einheitsvektor $\vec{e}$ gilt dabei $\left|\vec{e}\right| = 1$ und $\vec{e} \parallel \vec{v}$ (die Maßzahl bzw. der Zahlenwert des Einheitsvektors ist eins und seine Richtung ist parallel zu der Richtung der Geschwindigkeit). Der Einheitsvektor gibt die Richtung im Raum vor.

Beispiel 20
Vektorielle Größen sind: Kraft, Geschwindigkeit, elektrische und magnetische Feldstärke.

Beispiel 21
$\vec{s} = \vec{v} \cdot t$ ist eine vektorielle Größengleichung.

Die Darstellung von zwei- und dreidimensionalen Vektoren (Einheits-, Zeilen-, Spaltenvektoren) und das Rechnen mit Vektoren (z. B. Vektoraddition, -subtraktion, Betragsbildung) wird hier als bekannt vorausgesetzt. Die beiden speziellen Produkte von Vektoren, das Skalarprodukt und das Vektorprodukt, werden zur Erinnerung kurz angesprochen.

Skalarprodukt (Punktprodukt, inneres Produkt)

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine Zahl (eine skalare Größe).

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist:

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left[\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right] = c} \tag{1.4}$$

mit α = Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $0 \le \alpha \le \pi$

Spezielle Fälle:

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ für $\vec{a} \perp \vec{b}$ (Vektoren senkrecht aufeinander) (1.5)

$\vec{a} \bullet \vec{b} = ab$ für $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (Vektoren sind parallel) (1.6)

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = a^2 \tag{1.7}$$

Das Skalarprodukt aus den kartesischen Komponenten der beiden Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ist:

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \tag{1.8}$$

Für den Winkel $\alpha = \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ zwischen den beiden Vektoren gilt:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}} \tag{1.9}$$

Das Skalarprodukt erweist sich als nützlich, wenn es (wie im Falle „Arbeit ist Kraft mal Weg“, $W = \vec{F} \bullet \vec{s}$) auf den Winkel zwischen den Größen ankommt.

Ändern sich bei Verrichtung der Arbeit W die Richtungen oder die Beträge von Kraft und Weg, so muss zur Berechnung der Arbeit eine Integration (Wegintegral, Linienintegral) ausgeführt werden.

Für das Skalarprodukt ist statt der Schreibweise $\vec{a} \bullet \vec{b}$ auch die Darstellung $\left\langle \vec{a},\, \vec{b} \right\rangle$ üblich.

Vektorprodukt (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

Das Vektorprodukt zweier Vektoren ergibt einen Vektor. Das Vektorprodukt ist im Gegensatz zum Skalarprodukt nur im Raum definiert.

Das Vektorprodukt der beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ist:

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}} \qquad (1.10)$$

Wichtige Eigenschaften des Vektorproduktes:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \qquad (1.11)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ für } \vec{a} \,||\, \vec{b} \text{ (oder } \vec{a} = 0 \text{ oder } \vec{b} = 0) \qquad (1.12)$$

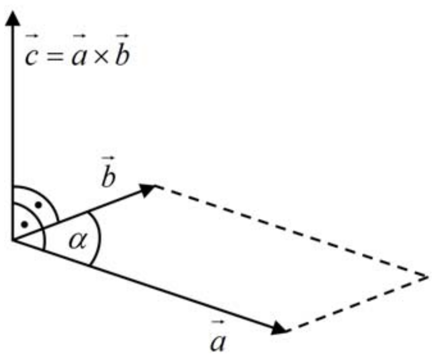
$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\alpha) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left[\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right] \qquad (1.13)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ steht } \perp \text{ auf } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \qquad (1.14)$$

Der Betrag des Vektorproduktes (die Länge von $\vec{c}$) entspricht der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$|c| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} \qquad (1.15)$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in genau dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem**. Wird $\vec{a}$ auf kürzestem Weg nach $\vec{b}$ gedreht, so zeigt $\vec{c}$ in Richtung der Bewegung einer Schraube mit Rechtsgewinde.



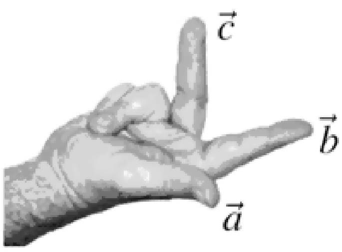


Abb. 1: Zum Vektorprodukt (links), Merkregel zum Rechtssystem mit Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand (rechts)

Beispiel 22

Das Drehmoment ergibt sich als Ergebnis eines Kreuzproduktes aus Hebelarm und Kraft, $\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}$. Auf die Reihenfolge der Faktoren ist zu achten: $\vec{l} \times \vec{F} = -\left(\vec{F} \times \vec{l}\right)$, der Betrag ist gleich, aber die Richtung ist entgegengesetzt.

1.7 Partielle Ableitungen

Das Differenzieren einer Funktion mit einer unabhängigen Variablen wird hier als bekannt vorausgesetzt. Für die Bestimmung der partiellen Ableitungen von Funktionen mit *mehreren* unabhängigen Variablen gelten die *gleichen Regeln* und Techniken wie beim Differenzieren von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen (auch die Kettenregel).

Unter einer partiellen Ableitung versteht man die Ableitung einer Funktion mehrerer unabhängiger Variablen nach einer dieser Variablen. Alle anderen Variablen werden dabei wie Konstanten behandelt. Von einer Funktion gibt es also genauso viele erste Ableitungen, wie unabhängige Variable in der Funktion vorkommen.

Für eine Funktion mit n Variablen $z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ gilt somit:

$$\boxed{z_{x1} = \frac{\partial z}{\partial x_1};\; z_{x2} = \frac{\partial z}{\partial x_2};\ldots;\; z_{xn} = \frac{\partial z}{\partial x_n}} \quad (\partial \text{ ist ein stilisiertes d}) \tag{1.16}$$

Beim partiellen Differenzieren werden alle Variablen bis auf die eine, nach der differenziert wird, als Konstante angesehen. Die Variablen werden allerdings nur beim Differenzieren wie eine Konstante behandelt, sind aber nach wie vor Variablen.

Da auch die partiellen Ableitungen wieder Funktionen der unabhängigen Variablen sind, lassen sie sich wie die Ableitungen von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen noch einmal partiell differenzieren. Man erhält die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion.

$$\boxed{z_{x1x1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{\partial z_{x1}}{\partial x_1};\; z_{x2x2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \frac{\partial z_{x2}}{\partial x_2};\ldots; z_{xnxn} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = \frac{\partial z_{xn}}{\partial x_n}} \tag{1.17}$$

Außerdem ist es möglich, die erste partielle Ableitung nach x_1 im zweiten Schritt nach x_2 sowie die partielle Ableitung nach x_2 anschließend nach x_1 zu differenzieren. Man erhält dann die gemischten partiellen Ableitungen.

$$\boxed{z_{x1x2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial z_{x1}}{\partial x_2};\; z_{x2x1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial z_{x2}}{\partial x_1}} \tag{1.18}$$

Beispiel 23

$$z = f\left(x, y\right) = x^3 y - x\,y^3 + 2\,x - y + 5$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3y\,x^2 - y^3 + 2\,;\; z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y\,x\,;\; z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3\,x\,y^2 - 1\,;\; z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6x\,y$$

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2\,;\; z_{yx} = \frac{\partial z_y}{\partial z_x} = 3x^2 - 3y^2$$

Leseprobe 2

2 Felder

2.1 Allgemeines zu physikalischen Feldern

Der Begriff des Feldes gilt in der Physik als sehr schwierig, daher wird zunächst in einem kurzen geschichtlichen Rückblick die Entstehung des Feldbegriffes betrachtet.

Der Physiker Isaac Newton (1643–1727) formulierte Gesetze für die Planetenbewegung und C. A. Coulomb (1736–1806) etwa 100 Jahre später für die Kraftwirkung zwischen elektrischen Ladungen. Die Darstellungen, dass zwei Massen bzw. zwei Ladungen über eine Entfernung scheinbar ohne ein „Kraftübertragungsmedium" Kräfte aufeinander ausüben, beruhten auf der im 18. Jahrhundert beliebten Fernwirkungstheorie. Fernkräften wurden u. a. folgende Eigenschaften zugeschrieben: Die Ausbreitung einer Fernkraft erfolgt stets geradlinig. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Fernkraft ist unendlich groß, sie erscheint gleichzeitig am Ort ihrer Entstehung und am Ort ihrer Wirkung. Der Raum ist an der Übertragung der Fernkraft nicht beteiligt.

Die Fernwirkungstheorie der Newton'schen Mechanik beinhaltete Widersprüche zu Erfahrungen des Alltags und zu Beobachtungen von Experimenten, die Michael Faraday (1791–1867) ausführte. Faraday ersetzte die Fernwirkungstheorie durch die Nahwirkungstheorie (Feldtheorie). Die Feldtheorie besagt: Der Raum ist durch einen speziellen Raumzustand mit besonderen physikalischen Eigenschaften an der Übertragung der Kraft vom Ort ihrer Ursache zum Ort ihrer Wirkung beteiligt. Die Kräfte überspringen den Raum zwischen dem Ort ihrer Ursache und dem Ort ihrer Wirkung nicht geradlinig mit unendlich großer Geschwindigkeit, sondern werden in dem Raum von Raumpunkt zu Raumpunkt mit einer endlichen Geschwindigkeit entlang gedachter, auch krummlinig verlaufender „unsichtbarer Fäden", den Kraftlinien, übertragen. Diese **Kraftlinien** werden als **Feldlinien** bezeichnet.

Für Coulomb übte eine elektrische Ladung nur dann eine Kraft aus, wenn eine zweite Ladung vorhanden war. Für Faraday bildete sich um jede Ladung ein Feld aus, welches unabhängig von anderen Ladungen immer vorhanden war. Faraday erklärte die Kraftwirkung zwischen elektrischen Ladungen durch die Einführung einer neuen Größe, die er elektrisches Feld nannte. Die Fernwirkungen wurden auf Spannungen und somit auf Nahwirkungen im Feld zurückgeführt.

Der Physiker James Clerk Maxwell (1831–1879) gab Faradays Ideen die gültige mathematische Form, er fasste alle elektrischen und magnetischen Erscheinungen in wenigen Formeln zusammen. Die Maxwell'schen Gleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern und die Entstehung elektromagnetischer Wellen mit der Lichtgeschwindigkeit als (endliche) Geschwindigkeit der Ausbreitung (im Vakuum).

Ein Feld ist also ein nicht an das Vorhandensein von Stoffen gebundener Zustand des Raumes, in dem an jeder Stelle eine physikalische Eigenschaft vorliegt oder eine Kraftwirkung erfolgt. Der Zustand lässt sich durch seine Wirkungen auf geeignete Testobjekte nachweisen. Im Falle des elektromagnetischen Feldes sind diese Testobjekte (Probekörper) ruhende oder bewegte Ladungen. Dabei kann Arbeit verrichtet werden, folglich sind Felder Träger von Energie. Ein Feld ist infolgedessen ein bestimmter energetischer Zustand eines Raumes.

In der Elektrotechnik erfolgt oft eine Beschränkung auf elektrische und magnetische Felder.

2.2 Der Feldbegriff

Es folgt eine allgemeine Definition des Feldbegriffes:

- Ein Feld beschreibt einen physikalischen Zustand innerhalb eines Raumes, allgemein in vier Dimensionen (drei Koordinaten der Richtungen x, y, z und die Zeit t).

- Dieser Zustand wird durch eine physikalische **Feldgröße** beschrieben, die jedem Punkt des Raumes zugeordnet wird.
- Die Gesamtheit aller Zustandswerte im Raum heißt Feld.

In der Physik wird einem Sachverhalt (einer Eigenschaft, einem messbaren Merkmal eines Gegenstandes) oder einer Komponente eine physikalische Größe zugeordnet. Einfache Größen werden auch auf einfache Weise zugeordnet, z. B. beträgt eine Länge 20 Meter, die Bewegung eines Fahrzeuges erfolgt mit einer Geschwindigkeit von $5\ \mathrm{m/s}$, oder der Strom durch eine Leitung hat die Stromstärke 10 Ampere.

Im Unterschied zu einer einfachen Größe wird in einem Feld *jedem Raumpunkt* eine Größe zugeordnet. Ein Feld beschreibt also die räumliche Abhängigkeit einer Größe. Ein ebenes Feld, welches sich in einer Ebene vollständig beschreiben lässt, kann als Sonderfall eines räumlichen Feldes betrachtet werden.

Die den Raumzustand beschreibende physikalische Größe wird Feldgröße genannt. Ist die physikalische Größe ein Vektor mit einem Betrag und einer Richtung in jedem Raumpunkt, so sprechen wir von einem **Vektorfeld** (häufig als Kraftfeld bezeichnet). Wird nur der Betrag der vektoriellen Feldgröße betrachtet oder ist die physikalische Größe eine skalare Größe, dann sprechen wir von einem **Skalarfeld**.

- **Bei einem Vektorfeld wird jedem Raumpunkt ein Vektor (Feldvektor) zugeordnet.**
- **Bei einem Skalarfeld wird jedem Raumpunkt eine Zahl (ein Skalar) zugeordnet.**

2.3 Grafische Darstellung des Vektorfeldes

Vektorfelder können durch mathematische Ausdrücke beschrieben werden. Anschaulicher sind aber **Feldlinien**, sie sind die grafische Darstellung der Ortsfunktion einer Feldgröße. Feldlinien sind *gedachte* Hilfslinien im Raum.

Die Richtung einer Tangente an eine Feldlinie stimmt in allen Raumpunkten mit der Richtung des dort herrschenden Feldvektors überein. Der Betrag der Feldgröße kann entlang einer Feldlinie konstant sein oder sich entlang der Feldlinie ändern.

Die Gesamtheit der Feldlinien ist das **Feldbild** (Feldlinienbild), welches eigentlich aus unendlich vielen Feldlinien besteht. Bei der Darstellung eines Feldes durch ein Feldbild werden natürlich nur einzelne Feldlinien verwendet. Vereinbarungen für ein Feldbild sind:

1. Die Richtung der Feldlinie gibt in jedem Punkt des Raumes die Richtung der Feldgröße an.
2. Die Dichte der Feldlinien ist dem Betrag der Feldgröße proportional. Der Abstand benachbarter Feldlinien ist daher umgekehrt proportional zum Betrag der Feldgröße, je kleiner der Abstand ist, desto größer ist der Betrag.

Vektorfelder werden durch Feldlinien beschrieben, die in jedem Punkt die Richtung des Feldvektors angeben (z. B. im Strömungsfeld die Richtung des Geschwindigkeitsvektors, mit einer Dichte der Feldlinien entsprechend dem Betrag der Geschwindigkeit).

Feldlinien können sich nicht kreuzen, da im Kreuzungspunkt zwei verschiedene Feldrichtungen gleichzeitig existieren müssten. Verlaufen Feldlinien in einem bestimmten Raumgebiet parallel, so ist das Vektorfeld in diesem Gebiet homogen. Feldlinien sind stets überall glatt und stetig mit Ausnahme von Feldübergängen an Grenzflächen.

2.4 Grafische Darstellung des Skalarfeldes

Die Zahl, die in einem Skalarfeld einem Raumpunkt zugeordnet ist, nennt man **Potenzial**. Die Menge aller Punkte in einem räumlichen Skalarfeld, denen die gleiche Zahl zugeordnet ist, wird als **Äquipotenzialfläche** oder **Niveaufläche** bezeichnet. Auf ihnen hat die skalare physikalische Größe einen gleichbleibenden Wert. Im elektrostatischen Feld einer ruhenden Punktladung bilden z. B. Kugeloberflächen um die im Mittelpunkt der Kugeln befindliche Punktladung Äquipotenzialflächen.

Äquipotenziallinien ergeben sich in ebenen Skalarfeldern (z. B. Höhenlinien in geografischen Karten oder Linien gleichen Luftdruckes (Isobaren) in Wetterkarten). Werden gekrümmte Äquipotenzialflächen von festgelegten Ebenen geschnitten, so entstehen Äquipotenziallinien als Schnittkurven. Ein Beispiel sind Kreise in der xy-Ebene um eine Punktladung, welche die Schnittlinien mit den Kugeloberflächen darstellen.

Skalarfelder werden durch eine Schar von Äquipotenzialflächen beschrieben bzw. grafisch dargestellt, auf denen die den Raumpunkten zugeordneten Zahlenwerte konstant sind.

Eine **Äquipotenzialfläche steht stets senkrecht zu den Feldlinien** (den Kraftlinien).

2.5 Arten physikalischer Felder

2.5.1 Skalarfeld (nicht gerichtet)

Wird jedem Punkt $P(x, y, z)$ eines Raumes durch eine skalare Ortsfunktion $u(x, y, z)$ oder $u(\vec{r})$ ein Skalar (eine reelle Zahl) zugewiesen, so spricht man von einem *Skalarfeld*. Die Zahl $u(x, y, z)$ heißt **Potenzial**.

Beispiel 34
Die Temperaturverteilung in einem Raum, der Luftdruck in Abhängigkeit der Höhe über dem Meeresspiegel, das elektrische Potenzial in der Umgebung einer Ladung haben keine Richtung. Sie haben nur einen bestimmten Betrag in jedem Punkt des betrachteten Raumgebietes, sie bilden somit ein Skalarfeld.

2.5.2 Vektorfeld (gerichtet)

Wird jedem Punkt $P(x, y, z)$ eines Raumes durch eine vektorielle Ortsfunktion $\vec{u}(x, y, z)$ bzw. $\vec{u}(\vec{r})$ ein Feldvektor

$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$ zugewiesen, so spricht man von einem *Vektorfeld*.

Vektorfelder sind in jedem Punkt durch eine Richtung (Vektor) und einen Skalar (Betrag des Vektors) gekennzeichnet.

Beispiel 35
Die Größen elektrisches und magnetisches Feld, Stromdichte, Strömungsgeschwindigkeit haben in jedem Punkt des betrachteten Raumes eine Richtung und einen Betrag. Sie bilden jeweils ein Vektorfeld.

2.5.3 Potenzialfeld

Kann jedem Raumpunkt eines Vektorfeldes ein Potenzial zugeordnet werden, so liegt ein **Potenzialfeld** vor. Im Potenzialfeld ist jeder Punkt des Feldes durch das dort vorhandene Potenzial eindeutig bestimmt.

Potenzialfelder werden auch **Gradientenfelder** oder **konservative Felder** genannt, oder als Vektorpotenzial bezeichnet. Zum Begriff „konservatives Feld“ siehe auch Abschnitt 2.5.5.1. In einem Potenzialfeld ist ein Linienintegral (darauf wird später näher eingegangen) nur von Anfangs- und Endpunkt abhängig, aber nicht vom eingeschlagenen Verbindungsweg der beiden Punkte. Mit anderen Worten: Bei einem Potenzialfeld ist das Linienintegral längs einer beliebigen Kurve gleich der Potenzialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve.

2.5.3.1 Gradient

Ein stetiges Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ heißt **Potenzialfeld**, wenn eine reellwertige **Potenzialfunktion** (ein Skalarfeld!) $f(x,y,z)$ von $\vec{F}(x,y,z)$ existiert, für die gilt:

$$\boxed{\vec{F}(x,y,z)=\operatorname{grad}(f)=\nabla f=\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}} \tag{2.1}$$

Die Potenzialfunktion wird auch als Skalarpotenzial, kurz nur als **Potenzial** oder als Stammfunktion des Vektorfeldes bezeichnet. Die Abkürzung „grad" bedeutet **Gradient**, $\operatorname{grad}(f)$ ist die **partielle Ableitung** der Funktion $f(x,y,z)$ nach den Raumkoordinaten x, y und z. Das auf der Spitze stehende Dreieck ∇ ist der so genannte **Nabla-Operator**, ebenfalls (wie „grad") eine Abkürzung für die partielle Ableitung von $f(x,y,z)$ nach den drei Variablen x, y und z. Oft wird der Nabla-Operator als Vektor $\vec{\nabla}$ geschrieben. Der Differenzialoperator (partieller Ableitungsoperator) Nabla kann formal als Vektor notiert werden:

$$\boxed{\nabla=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}} \tag{2.2}$$

Die drei partiellen Ableitungen der Potenzialfunktion (des Skalarfeldes) $f(x,y,z)$ müssen also gleich sein mit den drei Komponenten F_1, F_2 und F_3 des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z)$, damit $\vec{F}(x,y,z)$ ein Potenzialfeld ist:

$$\boxed{F_1=f_x=\frac{\partial f}{\partial x};\ F_2=f_y=\frac{\partial f}{\partial y};\ F_3=f_z=\frac{\partial f}{\partial z}} \tag{2.3}$$

Der Gradient eines Skalarfeldes ist somit ein Vektorfeld.

Der Gradient beschreibt die Änderung eines Skalarfeldes $u(\vec{r})$, er ist derjenige Tangentialvektor (Ableitungsvektor) an ein skalares Feld, der in die Richtung des stärksten Anstiegs zeigt. Mit anderen Worten: Der Gradient eines Skalarfeldes ist ein Vektor, der **senkrecht auf den Niveauflächen** des Skalarfeldes steht, er zeigt in diejenige Richtung, in der die Funktion $\vec{F}(x,y,z)$ am schnellsten anwächst. Der negative Gradient zeigt in die Richtung der schnellsten Abnahme der Funktion $\vec{F}(x,y,z)$. Der Betrag des Vektors entspricht der Stärke der Änderung des skalaren Wertes. Der Gradient kann kurz als **Anstiegsvektor** bezeichnet werden.

Als **notwendige** Bedingung, dass $\vec{F}(x,y,z)$ ein Potenzialfeld ist, müssen die **Integrabilitätsbedingungen** gelten.

Für ein ebenes Vektorfeld muss erfüllt sein:

$$\boxed{f_{xy}=\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}=f_{yx}} \tag{2.4}$$

Für ein räumliches Vektorfeld muss gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = f_{yx} \\ f_{xz} &= \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = f_{zx} \\ f_{yz} &= \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = f_{zy} \end{aligned}} \tag{2.5}$$

Die notwendigen Integrabilitätsbedingungen sind auch **hinreichend**, wenn das **Gebiet**, in dem das Vektorfeld definiert ist, **einfach zusammenhängend** ist, d. h. keine „Löcher" enthält.

Die Potenziale von Gradientenfeldern sind stets nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, die beim Differenzieren wegfällt.

Aus dem Vektorfeld erhält man die Potenzialfunktion durch Integration über die Feldkoordinaten.

Ebenes Feld:

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \int F_1(x,y)\,dx + C_1(y) \\ \int F_2(x,y)\,dy + C_2(x) \end{cases}} \tag{2.6}$$

Räumliches Feld:

$$\boxed{f(x,y,z) = \begin{cases} \int F_1(x,y,z)\,dx + C_1(y,z) \\ \int F_2(x,y,z)\,dy + C_2(x,z) \\ \int F_3(x,y,z)\,dz + C_3(x,y) \end{cases}} \tag{2.7}$$

Die bei der unbestimmten Integration auftretenden Konstanten können die jeweils nicht beteiligten Variablen enthalten.

Bezüglich der **Konstante *C*** wird typischerweise ein **Bezugspunkt** gewählt, das Potenzial kann dann in jedem Punkt angegeben werden.

Beispiel 36

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$.

Die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ist eine Potenzialfunktion zu $\vec{F}(x,y,z)$, da gilt:

$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3 = 2z$ oder $\operatorname{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

Leseprobe 3

2.6 Integralsätze von Gauß, Stokes und Green

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung hängt der Wert eines gewöhnlichen Integrals nur von den Werten der Stammfunktion an den Grenzen des Integrationsintervalls ab:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ \text{mit}\ f(x) = \frac{dF}{dx}} \qquad (2.75)$$

Für Mehrfachintegrale gibt es Integralsätze, die in ähnlicher Weise Zusammenhänge zwischen den Integralen über Gebiete und den Integralen über die Ränder der entsprechende Gebiete herstellen. Mit diesen Integralsätzen wird die Beziehung zwischen Kurvenintegralen, Oberflächenintegralen und Raumintegralen hergestellt. Sie verknüpfen die lokalen Größen Divergenz und Rotation mit allgemeinen Größen.

2.6.1 Integralsatz von Gauß

Der Integralsatz von Gauß[1] stellt einen Zusammenhang her zwischen dem Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes und dem Oberflächenintegral dieses Vektorfeldes über die Hüllfläche des betrachteten Volumens. Dieser Satz erlaubt eine anschauliche Interpretation der Divergenz (er wird deshalb auch als *Divergenzsatz* bezeichnet) und ermöglicht sehr praktische Umformungen von Integralen.

Es sei $\vec{F}$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld und V ein räumlicher Bereich mit der geschlossenen Oberfläche S (S = Hüllfläche, die das Volumen umschließt). Die Parametrisierung der Hüllfläche sei so gewählt, dass die Flächennormale überall aus dem Bereich V heraus weist. Das nach außen gerichtete vektorielle Flächenelement ist $d\vec{S}$. Dann gilt:

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) dV = \oiint_S \vec{F} \bullet d\vec{S}} \qquad (2.76)$$

Der Integralsatz von Gauß in Worten: Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ in einem Volumen V ist gleich dem Oberflächenintegral dieses Vektorfeldes über die Hüllfläche S des Volumens (und somit gleich dem Fluss des Vektorfeldes durch die geschlossene Hüllfläche S des Volumens).

Mathematisch bedeutet dies, dass ein Oberflächenintegral eines Vektorfeldes über eine geschlossene Oberfläche eines Volumens in ein Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes umgewandelt werden kann und umgekehrt.

Wie nachfolgend gezeigt wird, handelt es sich beim Satz von Gauß um eine Bilanzgleichung.

In Abschnitt 2.5.3.3 wurde die Divergenz eines Vektorfeldes als seine Quelldichte eingeführt. Betrachtet man die Fluss-Bilanz (vergleichende Gegenüberstellung der ein- und ausströmenden Flüssigkeitsmenge) über die Oberfläche eines dreidimensionalen Bereiches V, so ist aus physikalischen Gründen anschaulich verständlich, dass der Überschuss des austretenden Flusses über den eintretenden Fluss die gesamte Quellstärke (Divergenz) im Inneren des Bereiches wiedergibt. Der Fluss durch die Oberfläche eines Volumens ist also gleich der Summe der Quellstärken im Volumen. Was im Volumen an Feld entsteht (und durch die Divergenz beschrieben wird), strömt durch die Oberfläche hinaus.

Nehmen wir wegen der Anschaulichkeit wieder an, das Vektorfeld $\vec{F}$ ist das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden (inkompressiblen) Flüssigkeit im Volumen V. Wenn insgesamt Flüssigkeit aus V

[1] Der Integralsatz von Gauß wird auch Satz von Gauß-Ostrogradski genannt, da er von diesen beiden Mathematikern unabhängig voneinander gefunden wurde.

herausfließt, so deshalb, weil im Inneren von V zusätzlich zum Strömungsvorgang Flüssigkeit „produziert" wird. Diese Produktion erfolgt mit örtlich variabler Intensität (unterschiedliche Produktion pro Flächen- und Zeiteinheit) und wird lokal durch die Quellstärke $\operatorname{div}\left(\vec{F}\right)$ beschrieben. Die linke Seite von Gl. (2.76) ist das Integral über diese Quellstärken in V und entspricht der pro Zeiteinheit in V insgesamt erzeugten oder vernichteten Flüssigkeitsmenge. Die rechte Seite von Gl. (2.76) ist ein Hüllenintegral und besagt, dass diese Flüssigkeitsmenge in der gleichen Zeiteinheit durch die geschlossene Hüllfläche S fließt. In Abschnitt 2.7.5.4 wurde erwähnt, dass das Flussintegral über eine Fläche S die pro Zeiteinheit durch die Fläche transportierte Stoffmenge ergibt. Das Hüllenintegral gibt somit Auskunft darüber, welche Stoffmenge im Inneren des umhüllten Gebietes pro Zeiteinheit erzeugt oder vernichtet wird. Die rechte Seite von Gl. (2.76) wird deshalb auch als *Ergiebigkeit* oder *Quellstärke* des Gebietes V bezeichnet.

Ist das Vektorfeld quellenfrei ($\operatorname{div}\left(\vec{F}\right) = 0$), so ist der Gesamtfluss durch die Hüllfläche S gleich null, die in das Volumen V ein- und austretenden Flüssigkeitsmengen sind dann gleich.

Der Satz von Gauß verknüpft also die Quellen und Senken eines Feldes im Inneren eines Volumens mit den Eigenschaften des Feldes auf der Oberfläche des Volumens.

Dieser Integralsatz hat eine völlig anschauliche Bedeutung: Alles, was aus einem Bereich V mehr abfließt als zufließt, muss dort in Quellen entstehen (oder im umgekehrten Fall in Senken verschwinden). Für den Fall, dass in V weder Quellen noch Senken vorhanden sind, lässt sich das kurz und prägnant formulieren: Fluss rein = Fluss raus.

Anwendung findet der Satz von Gauß z. B. in der Elektrostatik und Elektrodynamik sowie bei der *Kontinuitätsgleichung* für *Erhaltungsgrößen*. Erhaltungsgrößen sind z. B. Energie, elektrische Ladung, Impuls, Masse, also mengenartige Größen, die beim Ablauf irgend eines Vorgangs erhalten bleiben und weder erzeugt noch vernichtet werden können.

Der Satz von Gauß in der Ebene

$$\boxed{\iint_S \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) dS = \oint_C \vec{F} \bullet \vec{n}\, ds} \tag{2.77}$$

$\vec{F}$ = Vektorfeld, S = ebene Oberfläche, C = geschlossene Randkurve der Oberfläche mit einer Parametrisierung, dass beim Durchlaufen der Kurve die Fläche S „links" von C liegt (Umlaufen der Fläche im Gegenuhrzeigersinn, Rechtssystem), $\vec{n}$ = senkrecht außen auf C stehender Vektor (äußere Normale von S bzw. der Randkurve C)

In Worten: Der Fluss von $\vec{F}$ über C nach außen ist gleich dem Integral der Divergenz $\operatorname{div}\left(\vec{F}\right)$ über das Innere von S.

Statt $\oint_C$ wird in Gl. (2.77) häufig $\oint_{\partial S}$ geschrieben, wobei ∂S den Rand von S symbolisiert.

Mit $\vec{n}\, ds = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$ und mit $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$ ist Gl. (2.77) in Komponenten

$$\boxed{\iint_S \left(\frac{\partial F_1}{dx} + \frac{\partial F_2}{dy} \right) dS = \oint_C \left(F_1\, dy - F_2\, dx \right)} \tag{2.78}$$

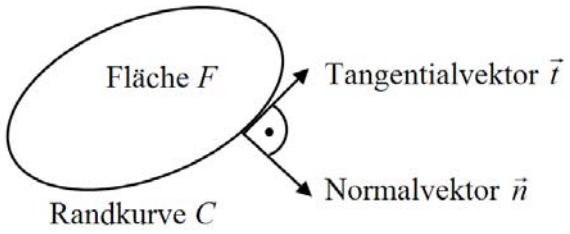


Abb. 27: Zum Satz von Gauß in der Ebene

Varianten des Integralsatzes von Gauß

Sei V ein regulärer Bereich, der durch eine Fläche S mit nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement $d\vec{S}$ berandet wird. Dann gelten für ein Skalarfeld f und ein Vektorfeld $\vec{F}$ die Beziehungen:

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{grad}(f)\, dV = \iint_S f\, d\vec{S}} \tag{2.79}$$

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{rot}(\vec{F})\, dV = -\iint_S \vec{F} \times d\vec{S}} \tag{2.80}$$

Beispiel 63

Satz von Gauß in der Ebene: Wie groß ist der Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ über eine Kreisfläche mit dem Zentrum im Ursprung und dem Radius $R = 2$?

Lösung:

Zuerst erfolgt die Berechnung über das Oberflächenintegral (linke Seite von Gl. (2.77)). Die Divergenz des Vektorfeldes ist

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises ist $x^2 + y^2 = R^2$. Aufgelöst nach *x*: $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$.

Berechnung des Flusses Φ in kartesischen Koordinaten: $\Phi = \iint_S \operatorname{div}(\vec{F})\, dS = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 2 \cdot dx\, dy$

$$\Phi = 2 \cdot \int_{-2}^{2} [x]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy = 2 \cdot 2 \cdot \int_{-2}^{2} \sqrt{4-y^2}\, dy = 4 \cdot \left[\frac{y}{2} \cdot \sqrt{4-y^2} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \right]_{-2}^{2} =$$

$$= 4 \cdot \left[0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \left(0 + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] = 4 \cdot 2\pi = \underline{\underline{8 \cdot \pi}}$$

Mit den Polarkoordinaten $R,\ \varphi$ des Kreises ist die Bestimmung des Integrals einfacher.

$$\Phi = \iint_S \operatorname{div}(\vec{F})\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2 \cdot dr\, d\varphi = 2 \cdot \int_0^{2\pi} 2 \cdot d\varphi = 4 \cdot 2 \cdot \pi = \underline{\underline{8 \cdot \pi}}$$

Nun erfolgt die Berechnung mit Hilfe der rechten Seite von Gl. (2.77).

Eine Parameterdarstellung des Kreises ist:

$$r(\vec{t}) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$$

Der Tangentialvektor an den Kreis ist:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(t) \\ R \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

Der Normalvektor an den Kreis ist:

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$\vec{F}$ als Funktion des Parameters *t*: $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$.

Skalarprodukt:

$$\vec{F} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \end{pmatrix} = R^2 \cdot \cos^2(t) + R^2 \cdot \sin^2(t) = R^2$$

$$\Phi = \int_{t=0}^{2\pi} R^2 dt = R^2 \cdot [t]_0^{2\pi} = R^2 \cdot 2 \cdot \pi = \underline{\underline{8 \cdot \pi}}$$

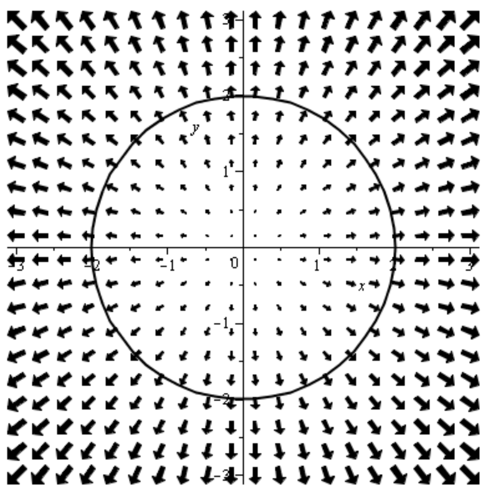


Abb. 28: Grafische Darstellung von Vektorfeld und Randkurve von Beispiel

Leseprobe 4

5 Grundlagen elektrischer Stromkreise

5.1 Ladung und elektrischer Strom

5.1.1 Bewegung von Ladungsträgern

Oberhalb des absoluten Nullpunktes ($-273{,}15\ °C$) führen freie Ladungsträger in einem Leiter oder Halbleiter Bewegungen aus, da die Zufuhr thermischer Energie die kinetische Energie der Teilchen erhöht. Durch verschiedene Wechselwirkungen mit den übrigen Teilchen sind Richtung und Betrag der Ladungsträgergeschwindigkeit rein zufällig und haben keinen Mittelwert. Da es keine Vorzugsrichtung gibt, fließt im Mittel auch kein Strom durch einen Leiter. Zwischen den Endpunkten eines Leiters ergibt sich durch die ungeordnete Wärmebewegung der Ladungsträger (*Brown'sche Molekularbewegung*) eine statistisch schwankende Spannung, die als *thermische Rauschspannung* bezeichnet wird.

Wird durch eine äußere Energiequelle (Spannungsquelle) ein elektrisches Feld im Leiter erzeugt, so wird durch die Kraftwirkung des Feldes auf die Ladungsträger deren ungeordneten Bewegung eine gerichtete Bewegung überlagert. Diese Bewegung in eine Vorzugsrichtung kann nur durch äußere Zufuhr von Energie aufrechterhalten werden. Die insgesamt resultierende Bewegung wird als *Driftbewegung* bezeichnet. Die in eine Richtung weisende mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger heißt dann **Driftgeschwindigkeit**. Durch die Driftbewegung werden unter Einfluss des elektrischen Feldes Ladungen transportiert.

Der gerichtete Fluss der elektrischen Ladung wird als elektrischer Strom bezeichnet.

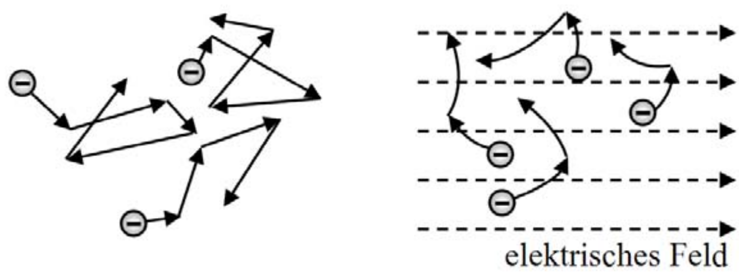


Abb. 48: Wärmebewegung (links) und Driftbewegung (rechts) von Elektronen

5.1.2 Konvektions- und Verschiebungsstrom

Es gibt zwei Arten des elektrischen Stroms: Den Konvektionsstrom im Leiter und den Verschiebungsstrom im Nichtleiter.

5.1.2.1 Konvektionsstrom, Leitungsstrom

Strom ist die Bewegung von elektrischen Ladungsträgern (Elektronen, Ionen) in einer Vorzugsrichtung. Fließen die Ladungsträger durch ein ruhendes Medium, z. B. einen Leitungsdraht, so spricht man von *Leitungsstrom*. Bewegen sich die Ladungsträger nicht durch die Einwirkung eines elektrischen Feldes, sondern werden durch eine von anderen Kräften hervorgerufenen Bewegung von einem Träger (z. B. von geladenen Staubpartikeln, kleinen Tropfen einer Flüssigkeit, strömenden Medien) durch den Raum transportiert, so spricht man von *Konvektionsstrom*. – Eine Definition mittels bewegter Masse von Ladungsträgern führt dazu, unter Konvektions- und Leitungsstrom das Gleiche zu verstehen. Ladungen sind immer an Materie gebunden, mit der elektrischen Strömung von

Ladungsträgern erfolgt immer eine Bewegung der Masse von Elektronen oder Ionen. Dieser durch eine Ladungsbewegung getragene elektrische Strom wird als Konvektions- oder Leitungsstrom bezeichnet. Man spricht auch von einem *Teilchenstrom*.

5.1.2.2 Verschiebungsstrom

Außer dem elektrischen Konvektionsstrom, der durch Ladungsträgerverschiebungen zustande kommt, gibt es auch einen elektrischen Strom ohne Bewegung von Masse, der somit auch keinen materiellen Leiter benötigt. Er entsteht durch zeitliche Ladungsänderungen von zwei Elektroden, zwischen denen sich ein Nichtleiter befindet. Dieser Strom entspricht einem sich zeitlich ändernden elektrischen Feld und wird als *Verschiebungsstrom* bezeichnet.

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei planparallel gegenüberstehenden Metallplatten mit einem Isolierstoff (genannt Dielektrikum) zwischen den Platten. Wird jeweils eine Platte mit einem der beiden Pole einer Gleichspannungsquelle verbunden, so wird der Kondensator aufgeladen. In den Zuführungsdrähten werden Elektronen bewegt, die Quelle treibt einen Konvektionsstrom an. Dieser Leitungsstrom beginnt an der einen Platte, auf der sich ein Elektronenmangel bildet, und endet an der anderen, auf der ein Elektronenüberschuss erzeugt wird. Durch die Spannungsquelle werden die Ladungen von der Spannungsquelle auf die Metallplatten verschoben.

An den Metallplatten endet die Ladungsbewegung. Auf den Platten ist jedoch eine zeitliche Ladungsänderung feststellbar, die in ihrer Größe der Ladungsbewegung je Zeiteinheit in den Drähten entspricht. Im Raum zwischen den Platten entsteht durch diese Ladungsänderung ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld. Dadurch spielen sich auch im Dielektrikum Erscheinungen ab, die als eine Art elektrischer Strom betrachtet werden können.

Das elektrische Feld bewirkt eine Verschiebung von Ladungen (Deformation der Elektronenhülle = Verschiebungspolarisation) oder eine Ausrichtung bereits vorhandener Dipole (Orientierungspolarisation) im Dielektrikum, welches dadurch polarisiert wird. Diese Verlagerung elektrischer Ladungen kann als Fortsetzung des Leitungsstroms betrachtet werden, welche diesen zu einem geschlossenen Stromkreis ergänzt. Der „Strom“ durch den Isolator wird Verschiebungsstrom genannt, da er mit der zeitlichen Veränderung der Ladungen auf den Metallplatten durch die Verschiebung von Ladungen verbunden ist. An den Grenzen von Kondensatorplatten und Dielektrikum geht der Leitungsstrom kontinuierlich in den Verschiebungsstrom über, der Leitungsstrom fließt scheinbar durch den Nichtleiter. Zwischen den Kondensatorplatten setzt sich der elektrische Leitungsstrom als elektrischer Verschiebungsstrom fort.

Der Verschiebungsstrom existiert sowohl in einem Dielektrikum als auch im Vakuum und stellt kein Fließen von Elektronen oder anderen Ladungsträgern dar, obwohl bei Vorhandensein eines Dielektrikums eine Verlagerung elektrischer Ladungen stattfindet. Im Vakuum ist der Verschiebungsstrom nicht mit einer Verlagerung elektrischer Ladungen verknüpft und kann daher nicht in anschaulicher Weise gedeutet werden, wie dies im Dielektrikum wenigstens teilweise möglich ist. Der Verschiebungsstrom ist eine durch *J. C. Maxwell* (1831–1879) eingeführte Erweiterung des Begriffes „elektrischer Strom“, der nicht durch freie Ladungsträger, sondern durch die zeitliche Änderung einer elektrischen Feldstärke verursacht wird. Ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld bezeichnet Maxwell als Verschiebungsstrom.

Anmerkung: Genau genommen ist bei Vorhandensein eines Dielektrikums der Verschiebungsstrom die Summe aus dem Fluss der zeitlichen Änderung der elektrischen Feldstärke und dem Strom durch verschobene Ladungsträger im Dielektrikum (dem *Polarisationsstrom*), siehe Abschnitt 5.5.2.2.

Der zunächst nur gedanklich eingeführte Verschiebungsstrom besitzt physikalische Realität, da bei seinem Auftreten auch ein messbares Magnetfeld entsteht. Um die Zuleitungsdrähte des Plattenkondensators bildet sich als Ergebnis der Ladungsbewegung ein magnetisches Wirbelfeld (kreisförmig um den stromführenden Draht liegende magnetische Feldlinien).

Ebenso kann im nicht leitenden Zwischenraum des Kondensators während der Ladungsverschiebung ein quantitativ gleicher magnetischer Raumzustand (ein Magnetfeldwirbel) gemessen werden, als würden im nicht leitenden Medium Ladungen bewegt. Ein Magnetfeldwirbel entsteht also sowohl bei Ladungstransport durch einen materiellen Leiter, als auch im leeren Raum bei der zeitlichen Änderung eines elektrischen Feldes (hervorgerufen durch eine Änderung der Ladungsmenge).

Wie der Strom im Leiter, so ist auch das sich zeitlich ändernde elektrische Feld von kreisförmigen magnetischen Feldlinien umgeben. Somit setzt sich das Magnetfeld um den Draht stetig in den Raum zwischen den Platten fort. Analog ist die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes die Fortsetzung des Leitungsstroms im Draht, man bezeichnet sie als Verschiebungsstrom.

Die beschriebenen Verhältnisse bezüglich des Verschiebungsstroms gelten nicht nur beim Aufladen, sondern auch beim Entladen eines Kondensators, und falls sich ein Kondensator in einem Wechselstromkreis befindet. Mathematisch werden die geschilderten Zusammenhänge durch die maxwellschen Gleichungen beschrieben.

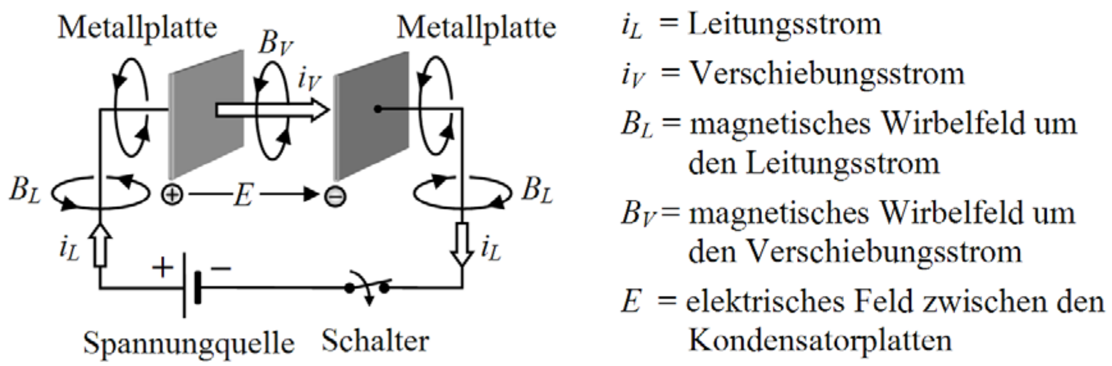


Abb. 49: Leitungsstrom, Verschiebungsstrom und Magnetfeld. Der Stromfluss in der Leitung ändert die Ladung auf den Kondensatorplatten. Dadurch ändert sich das elektrische Feld, es entsteht der Verschiebungsstrom.

Technische Anwendungen basieren im Wesentlichen auf dem Fluss von Elektronen oder Löchern. Im Folgenden wird daher zunächst das Strömen von Elektronen näher betrachtet.

5.1.3 Diffusionsstrom, Feldstrom

Besonders bei Halbleitern wird von Diffusionsstrom und Feldstrom gesprochen.

Eine Ladungsbewegung kann auch ohne elektrisches Feld auftreten, wenn ein örtlicher Konzentrationsunterschied existiert. Die Natur hat das Bestreben, diese Unterschiede auszugleichen. Ladungsträger diffundieren aus dem Gebiet mit der höheren Konzentration in das Gebiet mit geringerer Konzentration. Eine Teilchenbewegung, die durch Konzentrationsunterschiede hervorgerufen wird, nennt man einen *Diffusionsstrom*. Das Ausgleichsbestreben bzw. der Diffusionsstrom ist umso größer, je größer der Konzentrationsunterschied je Längeneinheit, d. h. je größer das Konzentrationsgefälle ist. Ein Diffusionsstrom entsteht z. B. durch das Dichtegefälle der Ladungsträger in den unterschiedlich dotierten Gebieten, wenn ein p-dotierter Halbleiter mit einem Überschuss an Löchern und ein n-dotierter Halbleiter mit einem Überschuss an Elektronen zusammengebracht wird. Der Diffusionsvorgang wird durch eine hohe Temperatur begünstigt.

Den unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes fließenden Strom nennt man *Feldstrom* oder *Driftstrom*. Entsteht innerhalb eines Halbleiters durch Diffusionsvorgänge ein Potenzialgefälle, so bewirkt dieses elektrische Feld $\vec{E}$ auf freie Ladungsträger eine Kraft

$$\boxed{\vec{F} = e \cdot \vec{E}} \tag{5.1}$$

Der daraus resultierende Strom wird als Feldstrom bezeichnet. **Die Richtung des Feldstroms ist im Halbleiter entgegengesetzt zur Richtung des Diffusionsstroms.**

Leseprobe 5

5.6 Elektrische Spannung, Potenzial

Im elektrischen Feld $\vec{E}$ wird nach Gl. (2.38) bzw. Gl. (5.1) auf Ladungsträger eine Kraft ausgeübt. Positive Ladungsträger führen eine Bewegung in Feldrichtung, negative entgegen der Feldrichtung aus. $\vec{E}$ ist ein Vektorfeld mit einer Richtung im dreidimensionalen Raum, somit kann das Feld in einzelne Komponenten zerlegt werden. Im kartesischen Koordinatensystem ist die Komponentendarstellung von $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + E_z \cdot \vec{e}_z} \tag{5.52}$$

Bei Berechnungen müssten also immer alle drei Komponenten von $\vec{E}$ berücksichtigt bzw. ermittelt werden. Um dies für die meisten Berechnungen in der Elektrotechnik und Elektronik zu vermeiden, wurde ein übergeordnetes *Skalarpotenzial*, das *elektrische Potenzial* φ eingeführt. Die Potenzialfunktion $\varphi(x,y,z)$ ist eine Funktion des Ortes, als skalare Funktion besitzt sie keine Richtung und zerfällt somit auch nicht in einzelne Komponenten. Jedem Raumpunkt ist nur eine Zahl zugeordnet. Bei Bedarf lässt sich aus dem Skalarfeld $\varphi(x,y,z)$ das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ ermitteln:

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\left[\varphi(x,y,z)\right] = -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\vec{e}_z} \tag{5.53}$$

kurz

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi} \tag{5.54}$$

Der Gradient ist ein Vektor, der in die Richtung des stärksten Anstiegs von $\vec{E}$ zeigt. Das negative Vorzeichen in Gl. (5.54) bedeutet nur, dass die Feldlinien von $\vec{E}$ in Richtung der schnellsten Potenzialabnahme zeigen, da der positiveren Gesamtladung ein höheres Potenzial zugewiesen wird.

Zur weiteren Erläuterung des Potenzials wird die Arbeit im elektrischen Feld betrachtet.

Zwischen zwei ruhenden, räumlich getrennten Ladungen $+Q_1$ und $-Q_1$ bildet sich ein elektrostatisches Kraftfeld aus. Zwischen den beiden Ladungen und auch auf Ladungsträger in ihrer Umgebung wirken Kräfte. Die Kraftrichtung an einem bestimmten Ort ist durch die Feldlinien gegeben.

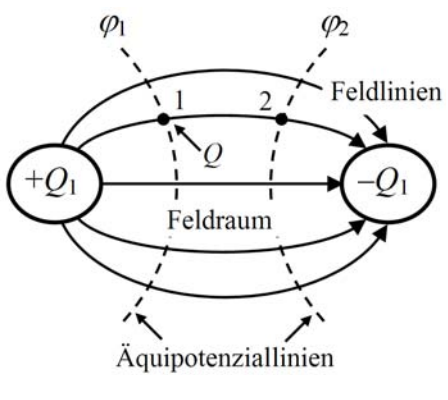


Abb. 64: Ladungsverschiebung im elektrischen Feld

Die Kraft auf die Ladung Q in Richtung von $\vec{E}$ ist $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$. Wird die Ladung Q (und damit eine Masse) im elektrischen Feld vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 bewegt, so muss Kraft aufgewendet und damit mechanische Arbeit W_{12} verrichtet werden (entsprechend „Arbeit = Kraft mal Weg"). Im inhomogenen Feld ist diese Arbeit:

$$\boxed{W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \bullet d\vec{s}} \tag{5.55}$$

Zeigen $\vec{F}$ und $d\vec{s}$ in gleiche Richtung, so wird Energie freigesetzt, andernfalls muss Energie aufgewendet werden.

Wird eine Ladung Q unter Aufwendung von Energie von einem Punkt P_0 um eine Wegstrecke zu einem Punkt P_1 im elektrischen Feld verschoben, dann hat sie die an ihr verrichtete Arbeit in Form von potenzieller Energie gespeichert (ähnlich wie ein angehobener Körper im Gravitationsfeld potenzielle Energie besitzt). Die potenzielle Energie der Ladung ist dann:

$$\boxed{W_1 = \varphi_1 \cdot Q} \tag{5.56}$$

War das Potenzial φ der Ladung (ihre *Arbeitsfähigkeit*) vor der Verschiebung null, so hat die Ladung nach der Verschiebung im Punkt P_1 in Bezug auf ihren vorherigen Ort am Punkt P_0 das elektrische Potenzial:

$$\boxed{\varphi(P_1) = \varphi_1 = \frac{W_1}{Q}} \tag{5.57}$$

Wird die Ladung Q weiter unter Aufwendung von Energie um eine Wegstrecke zu einem Punkt P_2 verschoben, so ist jetzt ihre potenzielle Energie gegenüber dem Punkt P_0:

$$\boxed{W_2 = \varphi_2 \cdot Q} \tag{5.58}$$

Das elektrische Potenzial der Ladung im Punkt P_2 gegenüber dem Punkt P_0 ist nun:

$$\boxed{\varphi(P_2) = \varphi_2 = \frac{W_2}{Q}} \tag{5.59}$$

Die Differenz der beiden potenziellen Energien ist:

$$\boxed{\Delta W = W_2 - W_1 = (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot Q} \tag{5.60}$$

Die Energiedifferenz ΔW kann auf die zu verschiebende Ladung bezogen werden. Die Definitionsgleichung Gl. (5.61) der elektrischen Spannung wird dadurch unabhängig von der elektrischen Ladung. Das Verhältnis $\Delta W / Q$ wird als **elektrische Spannung U** bezeichnet.

$$\boxed{U = \varphi_2 - \varphi_1} \tag{5.61}$$

Jedem Raumpunkt in der Umgebung einer elektrischen Ladung kann ein elektrisches Potenzial φ zugeordnet werden. **Die elektrische Spannung U zwischen zwei Punkten im elektrischen Feld ist gleich der Differenz der elektrischen Potenziale dieser Punkte.**

Somit kann ein Vektorfeld (das elektrische Feld $\vec{E}$) durch ein Skalarfeld $\varphi(x, y, z)$ charakterisiert werden. Jedem Raumpunkt von φ ist durch eine Zahl ein elektrisches Potenzial zugeordnet, welches die Arbeitsfähigkeit einer Ladung beschreibt, wenn sie sich an diesem Ort befindet.

Das elektrische Potenzial ist physikalisch gesehen ein Maß für die potenzielle Energie (= Arbeitsfähigkeit), die eine Ladung im elektrischen Feld besitzt. Die elektrische Spannung als Potenzialdifferenz ist ein Maß für die Arbeit, die eine Ladung im Feld verrichten kann.

Das elektrische Potenzial φ definiert die örtliche Verteilung des Niveaus der potenziellen Energie im elektrischen Feld. Anschaulich darstellen lässt sich das Potenzial durch Äquipotenzialflächen. Diese stehen immer senkrecht auf den Feldlinien. Eine Ladung kann entlang einer Äquipotenzialfläche bewegt werden, ohne dass Arbeit aufgewendet werden muss (die Kraft steht senkrecht zum Feld).

Das Potenzial φ entspricht Energie pro Ladung. Die Einheit der elektrischen Spannung und des elektrischen Potenzials ist somit:

$$\boxed{[U]=[\varphi]=1\ \mathrm{V\ (Volt)}} \tag{5.62}$$

Umrechnung: $\mathrm{V}=\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^3}$

Die Spannung U_{12} eines Punktes P_1 gegenüber einem Punkt P_2 wird positiv gerechnet, wenn das Potenzial im Punkt P_1 größer ist als im Punkt P_2. Der Index gibt den Bezugspunkt an.

$$\boxed{U_{12}=\varphi(P_1)-\varphi(P_2)=\varphi_1-\varphi_2=-U_{21}} \tag{5.63}$$

Elektrische Spannung wird immer durch eine Ladungstrennung und Ladungsverschiebung erzeugt. Elektrische Energie bedeutet die potenzielle Energie von getrennten ungleichnamigen Ladungen. Die Ladungstrennung erfolgt durch Einwirkung anderer Energieformen wie z. B. mechanischer, chemischer, Wärme-, oder Lichtenergie. Andere Energien werden in elektrische Energie umgewandelt, indem sie die Ladungstrennung bewirken und aufrechterhalten.

Zu einem Potenzial gehört immer ein **Bezugspunkt** oder **Bezugsniveau** (**Nullniveau**) mit dem Potenzial $\varphi=0\ \mathrm{V}$. Bei physikalischen Betrachtungen wird der Bezugspunkt mit dem Potenzial null häufig als im „Unendlichen“ liegend angenommen: $\varphi(\infty)=0$. Anschaulich bedeutet dies, dass die Anziehungskraft einer positiven Ladung und einer unendlich weit entfernten negativen Ladung null ist. Die unendlich weit entfernte Ladung hat die potenzielle Energie (bzw. das Potenzial) null.

Wird einem (frei wählbaren) Raumpunkt als Bezugspunkt das Bezugspotenzial $\varphi=0\ \mathrm{V}$ zugeordnet, so kann allen anderen Raumpunkten ein absolutes Potenzial zugeordnet werden. Zwischen diesen Raumpunkten und dem Bezugspunkt herrschen dann unterschiedliche Spannungen (Differenzen der Potenziale). In der Elektronik wird als Bezugs- oder **Massepotenzial** meistens das elektrische Potenzial der Erdoberfläche verwendet und als null definiert. In elektronischen Schaltungen wird der Bezugspunkt als **Masse** bezeichnet und mit dem Schaltzeichen »⊥« versehen.

Mit $\vec{F}=Q\cdot\vec{E}$ kann Gl. (5.55) anders dargestellt werden:

$$\boxed{W_{12}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\bullet d\vec{s}=Q\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\bullet d\vec{s}} \tag{5.64}$$

Da das elektrostatische Feld ein *konservatives* Feld ist (siehe Abschnitte 2.5.3 und 2.5.5.1) , ist die Arbeit W_{12} unabhängig von der Form des Weges zwischen Punkt P_1 und Punkt P_2, sie hängt nur von der Lage der beiden Punkte im elektrischen Feld ab.

Ist der Weg geschlossen (von P_1 über P_2 zurück zu P_1), so gilt:

$$\boxed{\oint\vec{E}\bullet d\vec{s}=0} \tag{5.65}$$

Aus Gl. (5.64) folgt die Spannung zwischen zwei Punkten im elektrischen Feld:

$$\boxed{U_{12}=\frac{W}{Q}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\bullet d\vec{s}=\varphi(P_1)-\varphi(P_2)} \tag{5.66}$$

Die elektrische Spannung zwischen zwei Raumpunkten ist gleich dem Wegintegral über die elektrische Feldstärke zwischen den Raumpunkten. Dabei ist es gleichgültig, über welchen Weg integriert wird.

In einem homogenen elektrischen Feld ist die Feldstärke in allen Punkten gleich groß und die Feldlinien sind parallel. Jede zu den Feldlinien senkrechte Ebene ist dann eine Äquipotenzialfläche. Es gilt:

$$\boxed{U = E \cdot s} \tag{5.67}$$

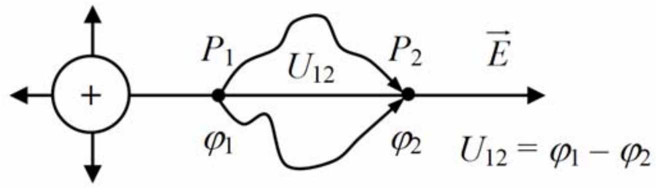


Abb. 65: Spannung U und Potenzial φ im elektrostatischen Feld

Das Potenzial $\varphi(P)$ eines Punktes P bezüglich des Nullniveaus P_0 ist definiert als:

$$\boxed{\varphi(P) = \int_{P}^{P_0} \vec{E} \bullet d\vec{s}} \tag{5.68}$$

5.7 Poisson-Gleichung

Die Poisson-Gleichung verknüpft das Potenzial φ bzw. die elektrische Feldstärke E mit der Raumladung ρ. Das Potenzial einer vorgegebenen Ladungsverteilung kann mit Hilfe der Poisson-Gleichung berechnet werden.

Mit Gl. (5.51) $\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$ und Gl. (5.54) $\vec{E} = -\mathrm{grad}(\varphi)$ erhalten wir

$$\boxed{\mathrm{div}\left[\mathrm{grad}(\varphi)\right] = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \tag{5.69}$$

Dies ist die Poisson'sche Differenzialgleichung oder kurz **Poisson-Gleichung**.

Der auftretende Differenzialoperator „$\mathrm{div}(\mathrm{grad})$" ist der **Laplace-Operator**, für den das Symbol „Δ" verwendet wird.

Die Poisson-Gleichung lautet also:

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \tag{5.70}$$

In kartesischen Koordinaten gilt für den Laplace-Operator:

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}} \tag{5.71}$$

Im raumladungsfreien Gebiet ist $\rho = 0$ und die Poisson-Gleichung reduziert sich auf:

$$\boxed{\Delta\varphi = 0} \tag{5.72}$$

Dies ist die Laplace'sche Differenzialgleichung oder kurz **Laplace-Gleichung**.