Statistischer Fehler
Fehler der Einzelmessung: $\Delta x = x_i - x_0$
Relativer Fehler [%] $\Delta x/x_0 = (x_i - x_0)/x_0$ x_0=wahrer Wert   x=Meßwert

Problem: x_0 unbekannt ⇒ ersetzen wahren Wert durch Bestwert $\bar{x}$

Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i$ oder $\bar{x} = \sum_1^n n_i \cdot x_i$ n_i = Wahr.fkt. ($N \to \infty$, $\bar{x} = x_0$)

Problem: Δx ist Schwankungsgröße, pos. und neg. Abweichungen gleich wahrscheinlich, darüber gemittelt ergäbe 0. ⇒

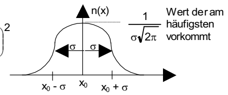
Standardabweichung: $\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2$ jeder einzelne Summand ins Quadrat

wenn Summand öfter $\sum a \cdot (x_i - \bar{x})^2$ = Breite der **Gaußkurve**

$$Z(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^2}$$

Häufigkeit: $n(x) = \frac{Z(x)}{N}$ Wahrscheinlichkeit mit der Meßwert x vorkommt!

$$n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^2}$$



$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ Wert der am häufigsten vorkommt

negative ... ←→ genauso viele positive Mittelwertabw. wie ...

Integral über Wahrscheinlichkeitsfkt. = 1   (Wahrsch.vergleich: teilen)
Einzelmessung kann schief gehen ⇒ mehmals Messen der selben Größe

Standardabweichung des Mittelwertes: $\sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ bei $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$
Mittelwert aus N Messungen

σ verringert sich

Fehlerfortpflanzungsgesetz: d.h. gesamter Fehler ist kleiner als die Summe der Einzelfehler

1. $\Delta L = \frac{dL}{dt} \cdot \Delta t = \frac{d(c \cdot t)}{dt} \cdot \Delta t$

2. $U = \frac{d}{t} \cdot T$ $\Delta U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial d}\right)^2 \cdot (\sigma d)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \cdot (\sigma t)^2}$

Statistik: $\sigma y^2 = \overline{\Delta y^2}$; wenn u völlig unabhängig von v, dann $\overline{uv} = \bar{u} \cdot \bar{v}$

$\frac{\partial U}{\partial d} = \frac{T}{\Delta t}$; $\frac{\partial U}{\partial t} = -d \cdot T \cdot \frac{1}{t^2}$; $\left(\frac{\partial U}{\partial d}\right)^2 \cdot (\sigma d)^2 = \frac{T^2}{t^2} \cdot d^2 \cdot 0{,}01^2$

$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \cdot (\sigma t)^2 = d^2 \cdot T^2 \cdot \frac{1}{t^4} \cdot 0{,}03^2 \cdot t^2 = \frac{T^2}{t^2} \cdot d^2 \cdot 0{,}03^2$

$\Delta U = \sqrt{0{,}001 \frac{T^2}{t^2} d^2} = 0{,}03 \frac{T}{t} d = 0{,}03 \cdot U \Rightarrow \frac{\Delta U}{U} = 0{,}03 = 3\%$

Gleichförmige Bewegung
Vektoren: Ortsvektor $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Addition: setze Vektoren aneinander; Subtraktion: $\vec{r}_1 + (-\vec{r}_2)$

Multiplikation: 1. Skalarprodukt (Entstehung einer Zahl) $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

2. Vektorprodukt (Enstehung eines Vektors) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ (Rechte Hand Regel)

Geschw. $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ Mittlere Geschw. $|\vec{v}(t)| \equiv v(t)$

Momentangeschwindigkeit ist tangential zur Bahnkurve.

$\bar{v}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ $\bar{v}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} v(x)dx$ (Denke an Dreieckfläche)

Beschleunigung: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ Richtung von a = Richtung von Δ v

Ursache der Bewegung: Kräfte. 1. Ein Teilchen auf das keine Kräfte wirken, bewegt sich mit konst. v 2. Änderung von v = a erfordert eine Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
3. Actio = Reactio

Trägheitskraft: $\vec{F}_t = -m \cdot \vec{a}$ (antragen in Kräftesystemen) $-m \cdot \vec{a}$ $\vec{a}$ $\vec{F}$ Trägheitskraft

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung
sobald Beschleunigung treten auch Trägheitskräfte auf

1) Ohne Anfangsgeschw.

$s = \frac{a \cdot t^2}{2}$; $v = a \cdot t$; $v = \sqrt{2as}$; $a = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$

2) Freier Fall

$x(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h = 0$ Falzeit: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ aus $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Endgeschw.: $v = g \cdot t = \sqrt{2gh}$

3. Mit Anfangsgeschw.: r_0 = bereits zurückgelegter Weg

$v_0 = a \cdot t$ $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$ $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

Waagrechter Wurf
Bahngl.: $y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$ $\vec{r} = \vec{s} + \vec{h} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{gt^2}{2}$

Bahngeschw.: $\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$

Wurfweite: $s = v \cdot t = \sqrt{2gh} \cdot t$; $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Schräger Wurf
Anfangg. v_0 $v_x = v_0 \cdot \cos\varphi$ $v_y = v_0 \cdot \sin\varphi$

Bahngl.: $y = x \cdot \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$

$\vec{v}_x = \vec{v}_0 \cdot \cos\alpha$ $\vec{v}_y = \vec{v}_0 \cdot \sin\alpha - \vec{g} \cdot t$

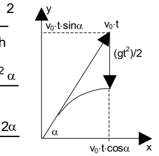
Wurfweite: $s = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$

Wurfhöhe: $h = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$

Bahngeschw.: $v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

max. Steighöhe: $h_m = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$

max. Wurfweite: $s_m = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$



Gleichförmige Kreisbewegung
Kin. Energie: $W = \frac{1}{2} J\omega^2$
Teilchen erfährt auf einer Kreisbahn mit v = const eine Beschl.

Zentripetalbeschl.: $a_z = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$ (zeigt nach innen)

Zentripetalkraft: $F_z = m \cdot a_z = m \cdot r \cdot \omega^2$ (nach außen)
Zentrifugalkraft   nach innen

Umfangsgeschw.: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega$

Winkelgeschw.: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ wenn ω konst. ⇒ gleichförm. Bewegung

T = Periodendauer, f = Kreisfrequenz   Frequenz: f = 1 / T = n / t
v tangential zur Kreisbewegung, ω senkrecht darauf   n=Umläufe

Winkelbeschleunig.: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

Beschleunigung obwohl Betrag von v konstant bleibt, ändert sich die Richtung, und das ist auch eine Beschleunigung.

Harmonische Schwingung
Hooksches Gesetz: $F = -D \cdot x$ $F = m \cdot a$
Wenn Kräftesystem im Gleichgewicht F_D entgegen F_G.

Schwingungsgleichung (Gleichgew. d. Kräfte): $m\ddot{x} + D \cdot x = 0$
Nur Lösung wenn Hook-Gl.

$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ x_0 = Amplitude

$v(t) = x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ ω = Kreisfrequenz

$a(t) = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ φ = Phase (Versch.kos.)

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{D}{J}}$ J = Trägheitsmoment

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ Fadenpendel $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ weil x = r · φ

Parallel: $D = D_1 + D_2$

Serie: $\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$ $f = \frac{1}{T}$ Periodendauer = Dauer einer Umdrehung

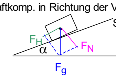
Schwingung mit Dämpfung: $x(t) = x_0 \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \cos\omega t$
Einhüllende

Flüssigkeitsschw.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$ L = Länge Flüss.säule

Bei cos, sin – förmigen Schwingungen gilt Hook-Gesetz.

Energie und Leistung
Arbeit: $W = \vec{F} \circ \vec{x} = F_H \cdot x \cdot \cos\alpha$

Beachte: Nur Kraftkomp. in Richtung der Verschieb. leistet Arbeit.
$F_H = F_g \cdot \sin\alpha$ Schiefe Ebene dient dazu Kraft zu reduzieren.
$F_N = F_g \cdot \cos\alpha$



Wenn Kraft sich entlang Weg ändert: $W = \int_{x_a}^{x_b} \vec{F} \circ d\vec{x}$ x = Auslenkung

$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$ Arbeit geg. Schwerkr. $W_{pot\,F} = \frac{1}{2}Dx^2$

Energie für $T = D_r \cdot \alpha \Rightarrow W = \frac{1}{2} D\alpha^2$

Merke: W_{pot} entsteht durch ortsabhängige Kräfte (Schwerkraft)

$W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ (v = a · t) $W_{Rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$

Energie, die ich mit Kraft aufbringen muß. Arbeit geg. Trägheitskr.

Energieerhaltungssatz
$W = W_{pot} + W_{kin} (+W_{Rot}) = \text{konst.}$

Gesamtenergie E eines abgeschloss. (von außen keine Kraft, loslassen u. schwingen) Systems ist für alle Zeit konst. Energie geht nicht verloren, kann nicht vermehrt werden, sondern nur umgewand. Praxis keine rein mech. Vorgänge, da z.B. durch Reibung mech. Energie in Wärme übergeht (gilt kein Energiesatz → Impulssatz)

Leistung: $P = \frac{W}{t} = F \cdot v$ $F_L = \frac{1}{2}c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$ Luftwiderstand

Schief Ebene: $F_R = F_H = \mu \cdot F_N$ bei v = const. $P = \frac{1}{2}c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$

Impuls = Stoß, Antrieb
$P = m \cdot v$
Es existieren in der Natur Größen, die sich zeitlich nicht ändern. Z.B. Energie, Impuls = Erhaltungsgrößen.

Impuls verursacht Translation (P = m·v und F = m·a → $F = \frac{P}{v} \cdot a$

Impulserhaltungssatz: $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = \text{konst.}$

Andere Form 2 NG $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$

Kraft = zeitliche Änderung des gesamten Impulses
$P = M \cdot v_M$ Gesamtimpuls = Impuls der Schwerpunkte
Energie und Impuls sind voneinander unabhängig.
Elastischer Stoß: Energiesatz und Impulssatz

1) $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$ mit Energiesatz gekoppelt

2) $v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$ 3) $v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$

4) $v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2m_1v_1}{m_2 + m_1}$ v_1 = stoßende Kugel, v_2 = ruhende Kugel =0

5) Energieübertrag: $\frac{\Delta W}{W} = \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2}$

Inelastischer Stoß nur Impulssatz

Drehbewegungen
Trägheitsmoment: $J = \int r^2 dm$ durch Schwerpunkt
$J = r^2 m$ von r und m abhängig
Ein Maß für Trägheit bei Rotation und entspricht der Masse bei Translation.
Nicht durch Schwerpunkt: → Satz von Steiner: $J_A = J_s + ms^2$

Kugel: $J = \frac{2}{5}mr^2$ Vollzyl.: $J = \frac{1}{2}mr^2$ Hohlzyl.: $J = mr^2$

Stab: $J = \frac{1}{12}mr^2$ Kreis: $J = \frac{1}{2}mr^2$ $m = \rho \cdot V = r^2\pi \cdot d \cdot \rho$

Drehmoment und Drehimpuls: Drehimp. verurs. Drehmoment
ω in Richtung von Drehachse (Rechte Hand Regel)   T/ω   F   α   r

$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin\alpha$ [Nm]
Immer bei Hebelgesetzen
Kleine Kraft kann größ. Drehm. als größ. Kraft ausüb, da von r abh.

$dW = \int \vec{T} \cdot d\vec{\varphi} \approx \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Leistung Rot. $P = T \cdot \omega$

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ($\vec{p}$ linearer Impuls, $\vec{r}$ Abstand)
[Nm·s] Dim. einer Wirkung, **L in Richtung ω**
Drall = Rotation: L = J · ω   bei Translation P = m · v

2 NG: $\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ Wenn keine Kräfte angreifen (T=0) ist Drehimp. eine Erhaltungsgröße! ⇒ Erhaltungssatz des Drehimpulses ⇒ J ~ 1 / ω

$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0$ oder $\vec{L} = \text{const}$ (aus L = r · P = r · m · v)

Präzession: a) Kraft greift Kreisel im SP an ⇒ keine Drehm. T = 0, L = const. b) Drehm. greift an (F wirkt) und Rad ist in Ruhe kippt es = Drehung, aber T ∥ L. c) Drehm. greift an und Rad dreht sich rotiert es um seine Achse, da Kreisel versucht L ∥ T zu stellen.
Präz.geschw.: Ω_P = Winkelgeschw. mit der L in der Horizont. umläuft

$\Omega_P = \frac{T}{J \cdot \omega_{Rad}}$ ⇒ Ω in Richtung von T; J = Trägheitsmoment Kreisel; T = Drehmoment; ω_R = Winkelgeschw. des Kreisels, in Richt. L; ΔL ∥ T

Reibung
nicht Rutschen $F_R > F_H$

Coulomb Reibung $F_R = \mu \cdot F_N$ $F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

Haftreib. μ_H (Körper haftet), Gleitreib. μ_G (Körper gleitet) $\mu_H > \mu_G$

Newton Reibung   schnelle Körper in Gasen, Flüssigk.

$F_R = \frac{1}{2}c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$ $P_R = F_R \cdot v$ (ρ_L = 1,3 kg/m³)

A = größter der Strömung entgegenstehender Körperquerschnitt
Stokes-Reibung
nicht zu schnelles Sinken eines Körpers in zäher Flüssigkeit

Kugel $F_R = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ (r = Radius Kugel, η = Viskosität) Betrag nehmen

Mittlere Masse eines Luftmoleküls
$m_L = m_H(2 \cdot M_N \cdot 0{,}78 + 2 \cdot M_O \cdot 0{,}22)$ m_H=Atom.masseneinh
Anzahl Luftmolek. N = bestimmte Masse Luft / m_L

Druck
Jede Deformation erfordert Kräfte.

Hydrostatischer (allseitiger) Druck $p = \frac{F}{A}$ ρ_W = 1000 kg/m³

Absolut Druck: $p_a = p + p_0$
Erinnerung: Bernoulli, Kontinuitätsgl.
Hydraulischer Druck: $p = \rho \cdot g \cdot h + p_0$ (äußere Luftdruck)
Null-Niveau festlegen für h
Pascalsches Prinzip: Formel ρgh unabhängig von Gefäßform.
Druck auf Teilchen der Oberfläche überträgt sich gleichmäßig auf alle Oberflächen (isotrop).
Archimedisches Prinzip: Auftrieb: $F_a = \rho \cdot g \cdot V$
Auftrieb = Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge
Tauchen (Volumenvergleich)
ρ = ρ der Flüssigkeit in der Körper schwimmt
V = Volumen der vom Körper verdrängten Flüssigkeit
Schwimmen: $F_a = F_G$ Ein schwimmender Körper verdrängt soviel Flüssigkeit wie er wiegt (Massenvergleich)
Atmosphärendruck in Höhe h bei T = const.:

Luftdruck: $p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} = p_0 \cdot e^{-\frac{3gh}{v^2}}$

($\rho_H = \rho_0$ ...) (x_0 = auf Erdoberfl.)   Staudruck: $\frac{F_R}{A} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$

Oberflächenenergie
① isotrop ➡ Kräftefrei
② res. Kraft = Kohäsionsdruck
Dieser Druck muß überwunden werden um ein Molekül an die Oberfläche zu bringen (kostet Arbeit)
⇒ Oberflächen sind Minimalflächen   σ = Oberflächenspannung
Oberfl.energie $dW = \sigma \cdot dA$ A: benetzte Fläche, Umfang

$F = \sigma \cdot 2 \cdot b = \frac{\Delta W}{\Delta s} = \frac{\text{Energieänd.}}{\text{Wegänd.}}$

Kraft mit der Flü.oberfläche sich zu verkleinern versucht
Normaldruck einer gekrümmten Oberfläche:

Kapillardruck Kugel: $p = \frac{2\sigma}{R}$ Druck auf innere Oberfläche

Seifenblase: $p = \frac{4\sigma}{R}$ Druck auf innere + äußere Oberfläche

Die pos. Krümmung einer Kugel kommt zustande, wenn innen ein Überdruck Δp herrscht.

Kapillarkraft F_A = Adhäsionsk. F_σ = Kohäsionk. F_A
Molek. der Glaswand ziehen H_2O Molek. hoch
Kontaktwinkel

$\cos\varphi = \frac{F_A - F_{\sigma 2}}{F_{\sigma 1}}$; cosφ >0; $F_A > F_{\sigma 2}$ → benetzend $F_{\sigma 2}$ φ $F_{\sigma 1}$

Kapillarsteighöhe: In einem Rohr kann das Wasser höher stehen als der Flüssigkeitsspiegel ist. Grund: F_A groß und Gesamtoberfläche des Wassers verkleinert sich auf Rohrinnenwand.

Kapillarsteighöhe: $h = \frac{2\sigma(\cos\varphi)}{R \cdot g \cdot \rho}$ σ_{H_2O} = 0,072 N/m

Viskosität
(von Oberfläche → Inneren)
Reibung zwischen den Schichten

Innere Reibung: $F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{d} = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx}$

d = Dicke der Schicht, v = Geschw. } Geschw.gradient
η = dyn. Viskosität [Pas] , Temp.abhängig, Flüss.: η << mit Temp.
kinematische Viskosität: $\vartheta = \eta/\rho$ Gase: η >> mit Temp.

Laminare Strömung
(überall zeitlich konst.), F_R >> Trägheitskraft
Strömung: Kräftefrei, v vorhanden aber kein a.

$F_P = \Delta p r^2\pi$ äußere Kraft → bewirkt Strömung

$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dr}$ Reibungskraft auf Flüssigkeit

$F_P = -F_R$ →
Strömungsgeschw. durch das Rohr in Schichten im Abstand r vom

Mittelpunkt: $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\ell} \cdot (R^2 - r^2)$ Δp = Druckunterschied zwischen oben und unten; R = vom Mittelpunkt zum Rand

Wenn v(r) = v(R) ⇒ v = 0 weil Fl. pappen bleibt

Mittlere Geschw.: $\bar{v} = \frac{\Delta p}{8\eta\ell} \cdot R^2 = \frac{v(0)}{2}$

Volumenfluss: $\dot{V} = \frac{\Delta p \cdot \pi}{8\eta \cdot L} \cdot R^4$ Hagen-Poiselle-Gesetz

Δp Druckunterschied zwisch. den Enden des Durchgangs von $\dot{V}$
$\dot{V}$ p_1 p_2 $\Delta p = p_1 - p_2$

Re-Zahl: $Re = \frac{\rho \cdot R \cdot v}{\eta}$ [/] = $\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$

⇒ Newton: $F_R = \frac{8}{R_e} \cdot \frac{1}{2}\rho A v^2$ Stokes: $F_R = \frac{12}{R_e} \cdot \frac{1}{2}\rho A v^2$

→ turbulent: Wirbelbildung, Re groß

Prandtl-Schicht: $d = \sqrt{\frac{6\eta \cdot L}{\rho \cdot v_0}}$ v_0 = Geschw. Austauschschicht, L = Länge Austauschschicht

beherrscht alle Austauschvorgänge zwischen Wand und Flüssigkeit, z.B. Wärmeverlust durch eine Mauer. η = 0 ⇒ F_R nicht 0

Elastizität   isotrope Festkörper
Volumenelastizität: Form bleibt gleich

$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$ $\frac{dV}{V} = -\frac{1}{k} \cdot dp$ Kompr.: ΔV neg.

Kompressionsmodul: $k = 1/\kappa$

Kompressibilität: $\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial p}$ $\kappa = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial p}$

Unter Druck   Rel. Vol.änderung   Rel. Dichteänderung
Rel. Vol.änderung bei Gasen:

$\kappa = \frac{1}{p} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p}dp$ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$

Rel. Vol.änderung bei Flüssigk. $\frac{V_2}{V_1} = e^{-\kappa \cdot \Delta p}$

Volumenarbeit isotroper Körper: $W = -\int_{V_1}^{V_2} p dV$

Dehnung: Ändert Form und Volumen
Normalspannung: σ = F/A (F ⊥ A) ; Dehnung: ε = ΔL / L
Elastizitätsmodul: E = σ / ε [Pa]
Dehnung hat Querkontraktion zur Folge. Poisson Zahl:

$\mu = (|\Delta d|/d)/(\Delta L/L)$ = rel. Änd. Breite / rel. Änd. Länge

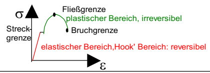
⇒ Schrumpfung des Körpers in der Breite
Volumenänderung bei
Dehnung: σ / E   ⇔   Stauchung:

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\mu)$ $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta L}{L}(1 - 2\mu)$

allseitiger Stauchung (in 3 Richtungen):

$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3\sigma}{E}(1 - 2\mu)$ $\kappa = \frac{3}{E}(1 - 2\mu)$

Scherung: Keine Vol.änderung, nur Form
Tangentialspannung: σ = F / A   F ∥ A
Hook: σ = G·α   G = Schubmodul [Pa]
Spannungs-Dehnungs-Diagramm: stress-strain



Wärme = Energie (Thermodynamik)
Wärme = Bewegungsenergie d. Moleküle
Gas: einatomig f = 3   mehratomig f = 6
zweiatomig f = 5
Festkörper: f = 6
Def.: "Freiheitsgrad" : unabhäng. Möglichkeit Energie aufzunehm.
Temp: Maß für die Wärmeenergie
Mittl. Energie eines Teil. / f: = ½ k_BT

Gas: Tempunabh.: Druck auf Wandfläche $p = \frac{1}{3}\rho \cdot \bar{v}^2$

Tempabh.: Allg. Gasgleichung

$pV = mRT$ $pV = nRT$ $R = N_a \cdot k_B$

Mittleres Geschw.quadrat: $\bar{v}^2 = \frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}$ (unabh. v. Richt.)

Mittlere kin. Energie für 1 Molek. unter Temp.

$E_k = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}k_B \cdot T$ $\boxed{\bar{v}^2 = 3\bar{v}_x^2}$

Osmotischer Druck: Flüssigk. steigt so hoch, bis

$\rho g h = p_{os} = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$

0ter Hauptsatz: Gleichverteilungssatz
Die in einem Gas enthaltene Energie verteilt sich gleichmäßig auf die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade (=mittl. Energie)
$E = 1/2 \cdot f \cdot k_B \cdot T = N \cdot 1/2 \cdot f \cdot k_B \cdot T$ ⇒ Innere Energie

$E = \frac{1}{2} \cdot f \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = m \cdot R \cdot T \cdot \frac{f}{2}$

Spezifische Wärme:

Festkörper: (c_p od. c_v vernachl.) $c = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{f \cdot k_B}{2 \cdot m}$

Gase: isobar $\Delta Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T$ [c =J/kgN]
isochor $\Delta Q = c_v \cdot m \cdot \Delta T$
Wärmekapazität $C = c \cdot m = \Delta Q / T$

1. Hauptsatz:
Durch Wärme steigt Temp. im Körper und dehnt sich aus
$\Delta W_Q = \Delta W_i + \Delta W_a$
zugeführte Wärme = innere Energie + äußere Energie
$\Delta W_a = p \cdot \Delta V = m \cdot R \cdot \Delta T$
$\Delta W_i = 3/2 \cdot m \cdot R \cdot \Delta T = \Delta Q(c_p/c_v)$
$c_p - c_v = R$,   Isotropenexponent $c_p / c_v = \gamma$

Molare Masse: $M = \frac{m}{n}$, c_v = Massenkonz. $\frac{n}{V} = \frac{c_V}{M}$

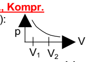
N Teilchen: $N = n \cdot N_a$
$k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K , $N_a = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ 1/mol , R = 8,31 J/Kmol

Wärmekraftmaschine
1) Wärmeenergie W_Q → mech. En.   (Motoren)
2) Wärme von kalt (mit E_{mech}) → warme Umgeb. (Kühlschrank)
(T_1 und T_2 bleiben konst., obwohl W_Q verschoben wird)

thermischer Wirkungsgrad: $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$

$\eta = \frac{P_{mech}}{P_{therm}} = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$ $P_{zu} = \frac{c \cdot m \cdot \Delta T}{t}$

Arbeitleistung durch Expan., Kompr.
Isotherm Expansion T (= const): $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$
Volumenarbeit:



$\Delta W_Q = \Delta W_a = \int_{V_1}^{V_2} pdV = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}$

$V_2 > V_1$: + $V_2 < V_1$: –
Isochor (V = const):
$p_1 / T_1 = p_2 / T_2$; $\Delta W_Q = \Delta W_i$
Isobar (p = const):
$V_1 / T_1 = V_2 / T_2$ $\Delta W_Q = \Delta W_i + p \cdot \Delta V$
Adiabatisch (keine Wärmeenergie an Umgeb.):
$\Delta W_Q = 0$; S = konst. ; $\Delta W_a = -\Delta W_i$

Adiabatenkoeff. $\gamma = \frac{2}{f} + 1$

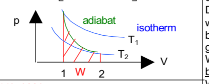
$p \cdot V^\gamma = \text{const}$; $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$

$T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{const}$; $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1}$

$p \cdot T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}$; $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$

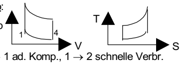
Arbeit bei ad. Expans., Komp.

$\Delta W_a = \frac{p_1 \cdot V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]$ Expans: + Komp.: –



Kreisprozesse
Rechtsproz.: W   Linksproz: W

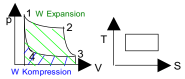
Otto:



4 → 1 ad. Komp., 1 → 2 schnelle Verbr.
2 → 3 ad. Exp., 3 → 4 Gasausdruck

$V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$ $\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma - 1}$

Carnot:



1→2: iso. Exp., T_1 = konst. 2→3: ad. Exp., Q_{23} = 0
3→4: iso. Komp. T_2 = konst. 4→1: ad. Komp. Q_{41} = 0

$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$

Boltzmann-Verteilung
Für chem. Reaktionen ist eine Schwellenergie notwendig. Moleküle müssen sich erst trennen um miteinander reagieren zu können. Wieviele Moleküle aus best. Bereich haben bei geg. Temp. eine bestimmte Energie W? Gilt nur im therm. Gleichgewicht: Boltzmann-Verteilung

Atmosphäre: $N = N_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{k_B \cdot T}}$

a) Dampfdruck: H_2O mit energier. Mol., die können sich lösen und in Dampfphase übergeh.

$N_D = N_{fl} \cdot e^{-\frac{W}{k_B \cdot T}}$

Flüss. im Gleichgew. mit Dampf (nach einer Zeit ändert sich nichts mehr, N_D, N_{fl} = const.) hat der Dampfdr. einen Sättigungswert, Sätt.dampfdruck

$p = p_0 \cdot e^{-\frac{W}{k_B \cdot T}}$ $W = q \cdot (M_{H_2O} / N_a) = q \cdot m$

Verd.wärme: $q_{H_2O} = 2{,}3 \cdot 10^6$ J/kg

Entropie S: Maß über Unordnung
Ein System hat bei geg. äußeren Bed. (p, V, T) eine Zahl Ω von erreichb. Zuständen.
S = k_B · ln Ω   Wahrscheinlichkeit P = 1 / Ω
2. Hauptsatz:
Wenn in einem isol. System (ideales Gas mit Grenzen) ein Makrozu. 1 (p_1, V_1, T_1) zu Makrozu. 2 (p_2, V_2, T_2) übergehen soll, findet der Überg. nur statt, wenn ΔS ≥ 0
Ohne äußeres Zutun nimmt Syst. Makrozu. ein, der wahrsch. ist. Makro 2 wahrsch. als Makro 1, wenn Zahl seiner Mikrozust. größer ist.
$\Omega_2 > \Omega_1 \to S_2 > S_1 \to \Delta S = S_2 - S_1 > 0$ Überg.
In einem abgeschl. System kann S nicht abneh.
Im Glgw. (nichts passiert mehr) ist S maximal.
Freie Expansion eines Gases: Irreversibel
Bei irrev. Prozess wird Energie entwertet, d.h. sie geht vom brauchbaren Zu. in unbrauchbaren
Entropieänderung von V_1 auf V_2 :
$\Delta S = k_B \cdot N \cdot \ln(V_2 / V_1)$ S ~ Teilchenzahl
S additiv (einfach aufadd.) $dS = dS_1 + dS_2$

irrev. Temp.zunahme
$\Delta S = W_Q / T$ $W_Q = mgh = \frac{1}{2}mv^2$
rev. Wärmeübertragung

$dS = \frac{dW_Q}{T} = c_p \cdot m \cdot \int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}$

Rev. Isotherme Expansion:
mit $\Delta S = k_B \cdot N \cdot \ln(V_2 / V_1)$

$\Delta S = W_Q / T$ $T = T_S, T_M$
Revers.: S bleibt const. ΔS = 0
Irrevers.: S nimmt zu
⇒ S kann nie abnehmen
Andere Form 2. HS: Entropie u. Wärmefluß
Wärme fließt von Körper höherer Temp. zu dem mit niedr. Temp.

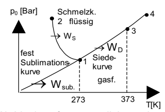
Freie Energie
$\Delta S_{ges.} = 1/T \cdot [T \cdot \Delta S_A - \Delta W_{i,A}]$
Änd. des Ges.syst. hängt von Änd. im Untersyst. ab.
Freie E.: $F_A = W_{i,A} - T \cdot S_A$, $\Delta F_A < 0$
Prozess im Syst. A (mit Kontrollb. T, V = const.) läuft spontan ab wenn $\Delta F_A < 0$ ist.
Im Glgw. muß F minimal sein. Änderung Kontrollb. T, p = const.: Enthalpie ΔG < 0
Im Glgw. muß G minimal sein.
Spontan: ΔW_i neg. → Abnahme
ΔS pos. → Zunahme

Phasenumwandlungen
a) Sieden

Sättig.dampfdruck $p_D = p_0 \cdot e^{-\frac{W_D}{k_B \cdot T}}$

wenn T steigt → p_D steigt, p_0 = Konstante
Eine Flüssigk. siedet bei derj. Temp., bei der ihr Sätt.dampfdruck gleich dem äußer. Druck ist. Beim Siedepunkt Blasenbildung wenn $p_D \le p_a$ (Luftdruck). Wenn $T = T_S$ bleibt es konst., bis das Ganze H_2O in den gasf. Zu. übergeg. ist, dann bewirkt die zug. Wärme wieder eine Erhöhung der Temp.

b) Schmelzen
W_s Schmelzwärme notw. um Kristallgitter aufzubrechen. Merke:
Siede, Schmelz, Sublimationstemp. = f(p)
Phasendiagramm H_2O



W_D Verdampf.en.   von links nach rechts
W_S Schmelz.en.   Entropie nimmt zu, da
W_{Sub} Sub.en.   von fest → flüssig
(Ordnung → Unordnung)
1 = Tripelpunkt 273 K
2 = Gefrierpunkt, Schmelzp. T_M = 273 K
3 = Siedepunkt T_S = 373 K
4 = kritische Punkt
T > T_C keine Verflüssigung mehr möglich auch bei noch so hohen Drücken

c) Siedepunkterhöhung
Zucker in H_2O: Sieden ; Zucker will gelöst bleiben wegen hohen S, er will nicht daß H_2O verdampft. Zucker wirkt Verdampfung entgegen ⇒ Erhöh. Siedetemp. u. Erniedr. Dampfdruck

$\Delta T_S = \frac{n_G}{n_{fl}} \cdot \frac{k_B \cdot T^2}{W_D}$

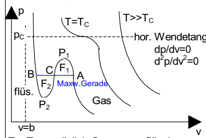
n_G = Anzahldichte Lösungsgut   [Teil. / Vol.]
n_{fl} = Anzahldichte Lösungsmittel
T = T_S Siedetemp. d. reinen Lös.mittels
W_D = Verdampf.energie

d) Gefrierpunkterniedrigung
Gelöste Mol. wollen gelöst bleiben, wirken der Kristallbildung entgegen. Gitter kann sich erst bei tieferen Temp bilden. ΔT_G wie oben, nur mit W_S. ⇒
T_S, T_G Qualimerkmal für Reinh. einer Subst.
M_O = 16g ; M_H = 1g ; M_N = 14 g

Reale Gase
Van der Waals Gleichung:

$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = n \cdot R \cdot T$

b = Eigenvolumen Gasmoleküle
a/v² = Binnendruck (Anzieh.kraft d. Mol.)
a, b = Gas spezifisch



T > T_C unmöglich Gase zu verflüssigen auch bei noch so hohen Drücken.
Min-Max-Kurve:

rechts: $\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} = -\frac{1}{V\,dp/dV}$

weil flach, Steigung dp / dV klein u. negativ ⇒ κ pos. u. groß
links: weil steil, Steigung groß u. negativ ⇒ κ pos. u. klein